

TEMA 4

FUNDAMENTOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

La resistencia de Materiales pueden considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica.

LA RESTRICCIÓN EN LA DEFINICIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO.

La Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.

LA ADOPCIÓN DE CIERTAS HIPÓTESIS FUNDAMENTALES.

Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional como un “ensamblaje” de problemas básicamente unidimensionales.

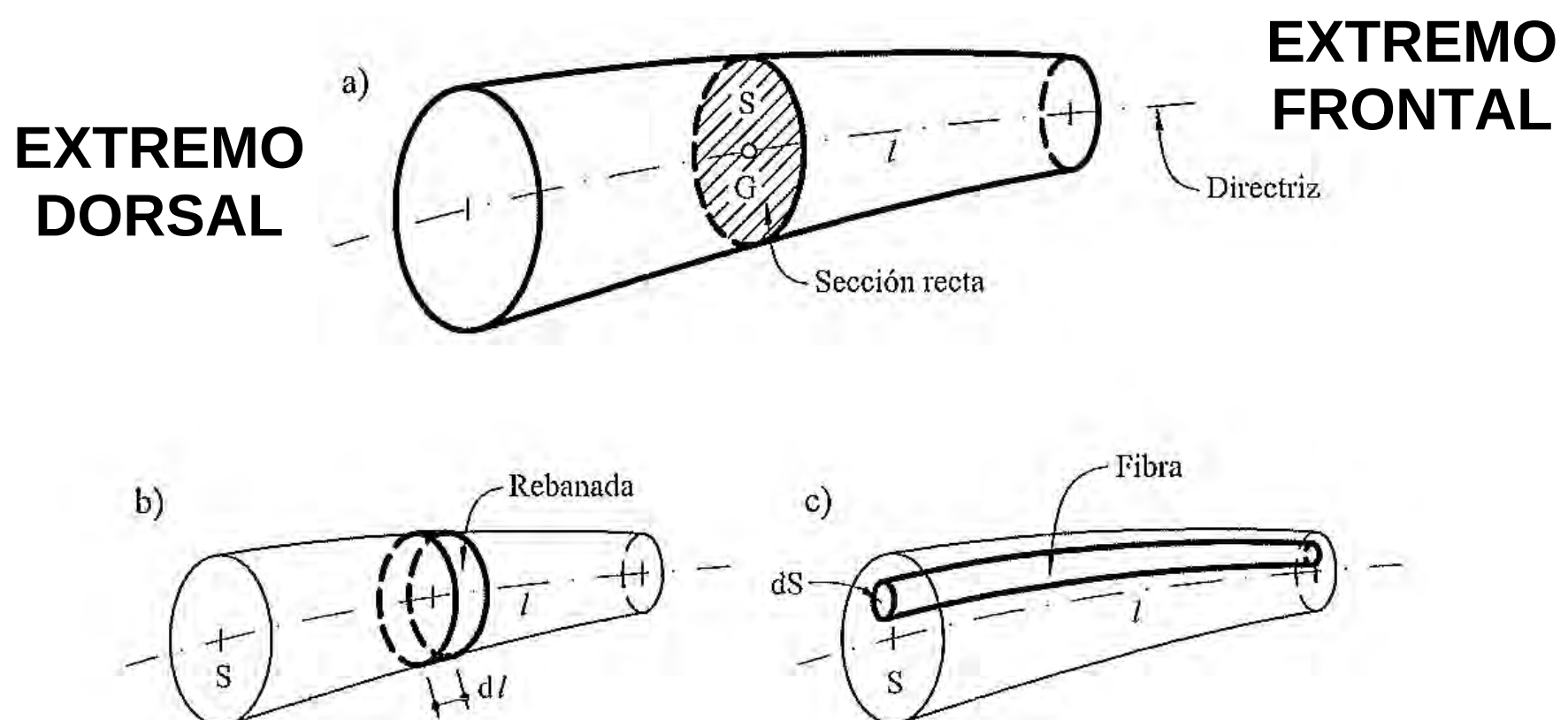
OBJETIVO DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

La Resistencia de Materiales, tiene como objetivo fundamental determinar la **RESPUESTA DE LAS ESTRUCTURAS** cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.

Por **RESPUESTA ESTRUCTURAL** se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran. La determinación de los estados de tensión es necesaria para comprobar la satisfacción de los **CRITERIOS DE RESISTENCIA** que establecen las normativas, la determinación de los estados de deformación suele ser necesaria para satisfacer los **CRITERIOS DE RIGIDEZ**, que están a menudo ligados a requisitos de funcionalidad de las estructuras.

La Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de resistencia y rigidez de las estructuras analizadas: dimensionamiento y la verificación de estructuras.

CONCEPTO DE PIEZA Y ESTRUCTURA



Pieza prismática, al cuerpo engendrado por un área plana S que se mueve en el espacio, de manera que su centro de gravedad G recorre una línea dada L y su plano se mantiene constantemente normal a dicha línea. A la línea L se le denomina **DIRECTRIZ**, línea media o eje de la pieza y a las diversas posiciones del área S se les llama **SECCIONES RECTAS O SECCIONES NORMALES** de la pieza se llama rebanada al elemento diferencial de pieza contenido entre dos secciones rectas infinitamente próximas.

FIBRA al elemento diferencial de volumen generado por un elemento diferencial del área plana S en el movimiento que genera la pieza prismática.

PIEZA DE PLANO MEDIO a aquella pieza plana en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas contenidas en dicho plano medio.

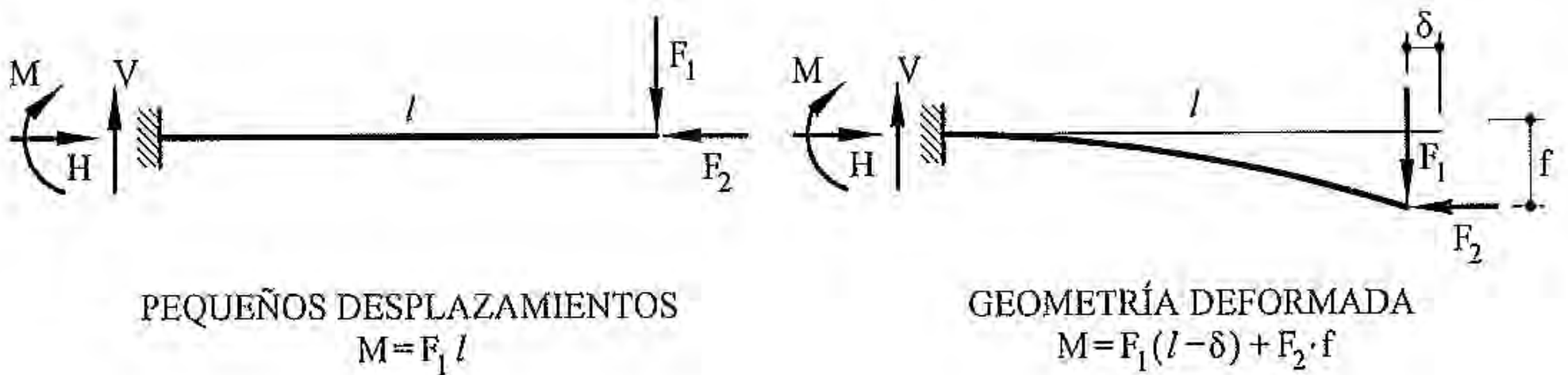
ESTRUCTURA DE PLANO MEDIO a la estructura plana formada por piezas de plano medio, que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio.

PRINCIPIOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en:

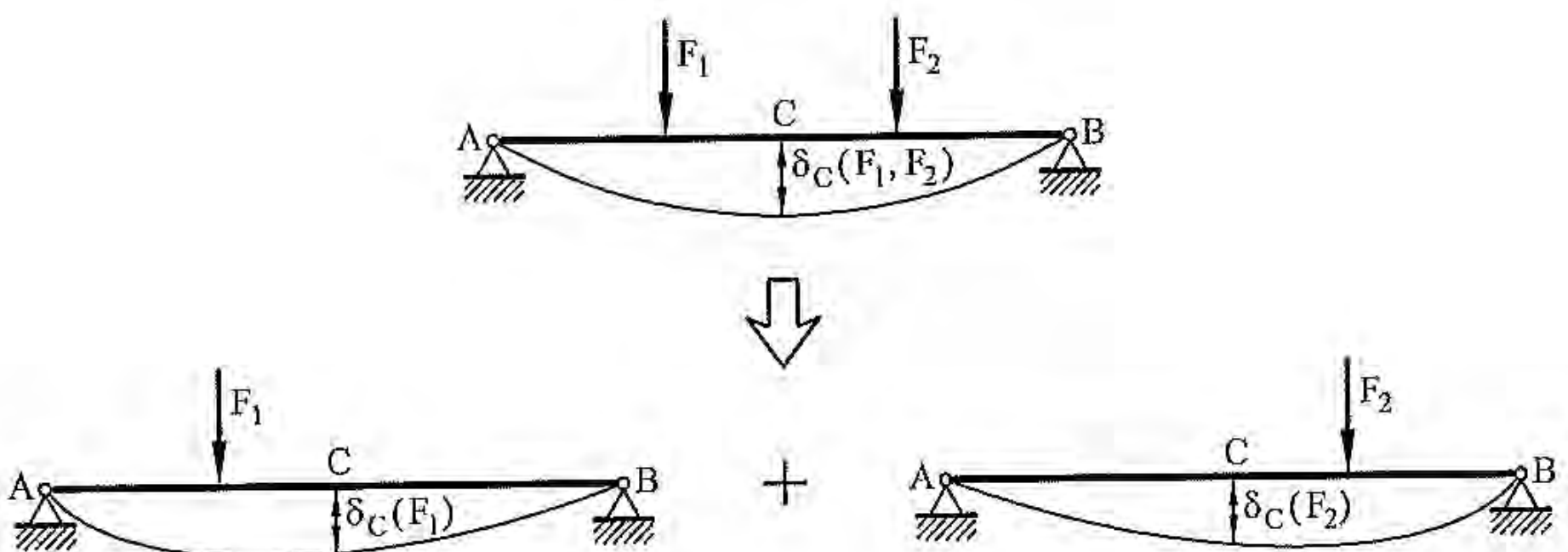
PRINCIPIO DE RIGIDEZ

“Las ecuaciones del equilibrio se pueden formular sobre la geometría indeformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas.”



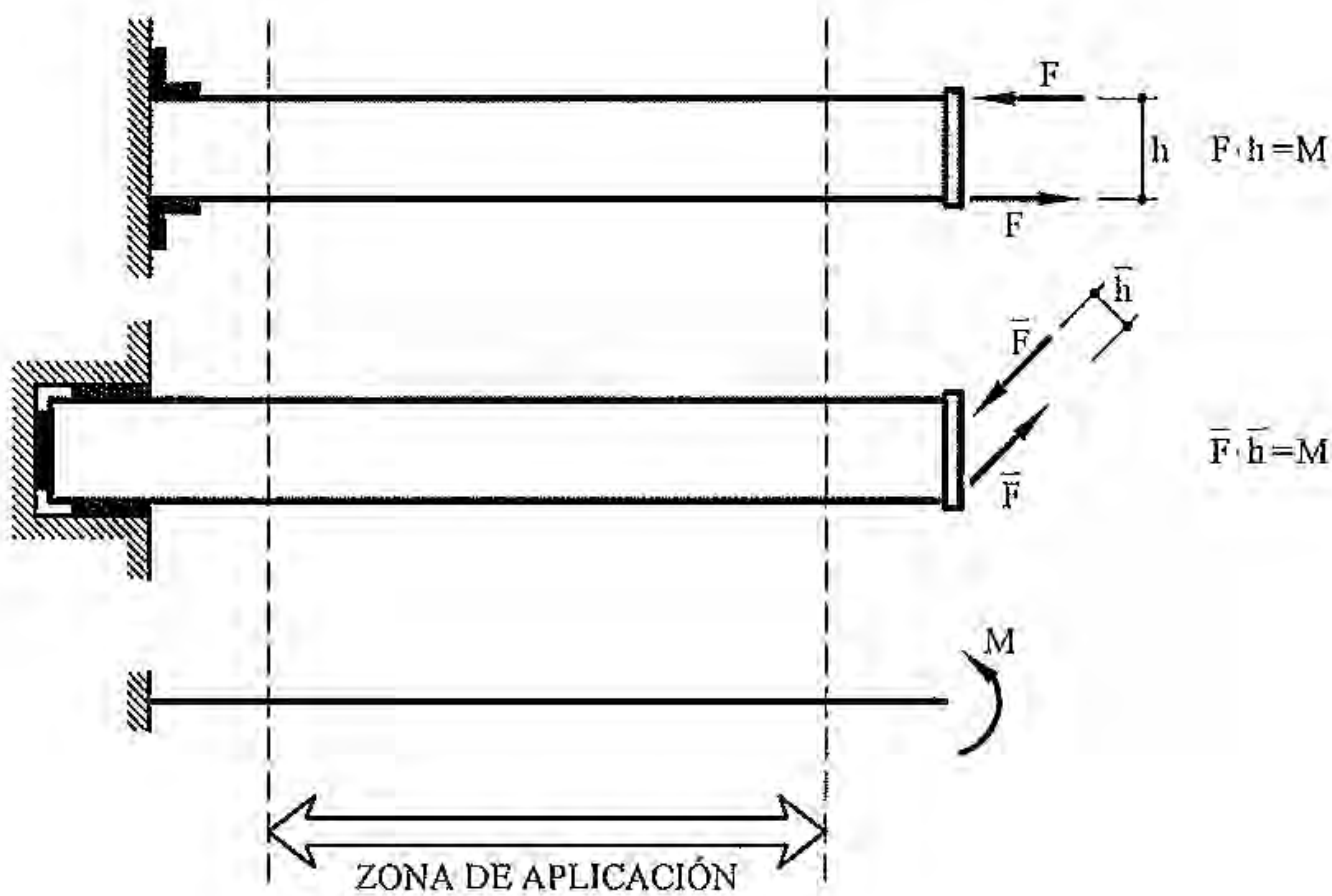
PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

“Los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”



PRINCIPIO DE SAN-VENANT

“En una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada.”



RESTRICCIONES GEOMÉTRICAS

GEOMETRÍA DE LA DIRECTRIZ.

En piezas de directriz curva, los radios de curvatura de ésta deben ser grandes en relación al canto de las piezas.

GEOMETRÍA DE LAS SECCIONES.

Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud.

En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta.

ESFUERZOS EN UNA SECCION

Dada una viga sometida a la acción de un sistema de cargas exteriores, supondremos que una sección recta cualquiera, S , divide la pieza en dos partes, (A) y (B) , situadas cada una a un lado de la sección considerada, tal como se muestra en la Figura 2.6.

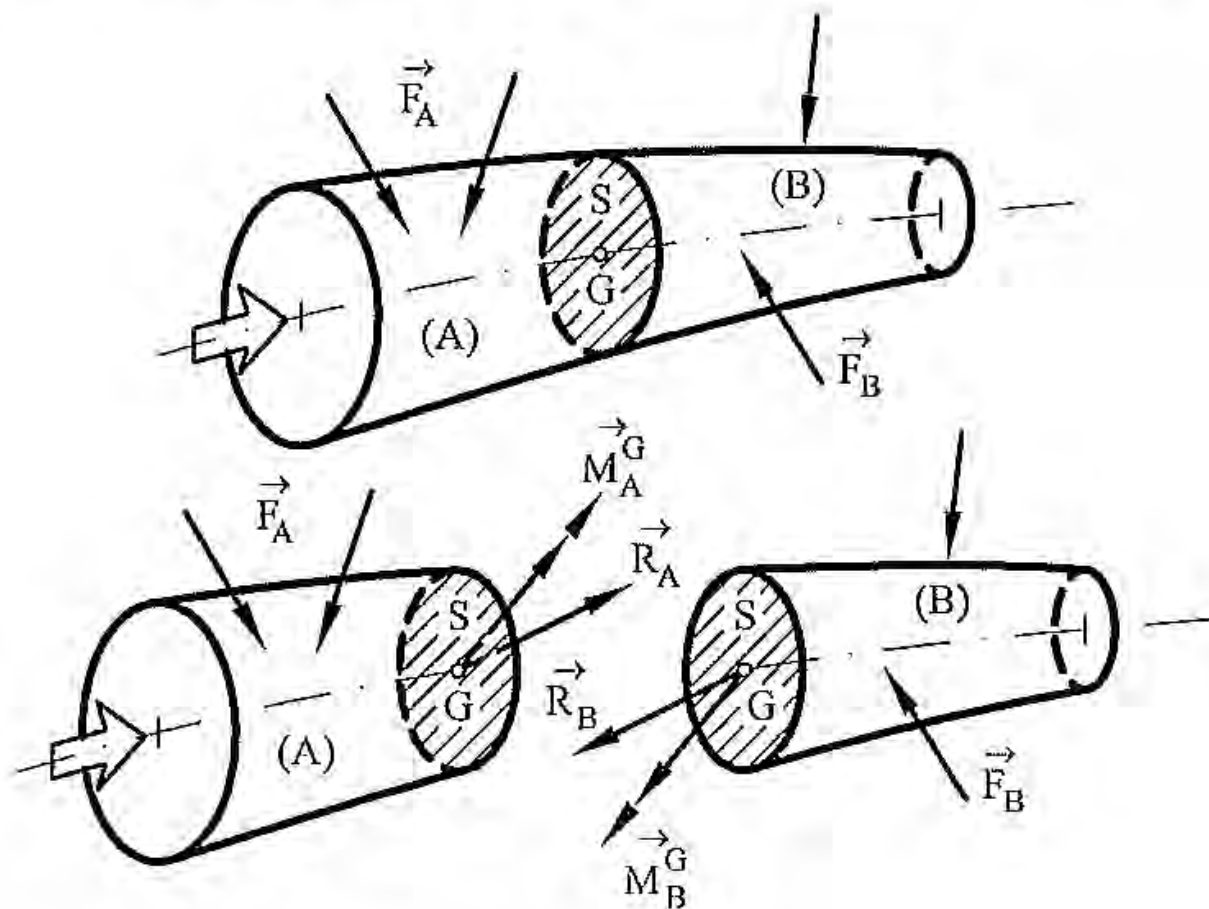
El sistema de fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre la viga debe estar en equilibrio estático. Si llamamos $\vec{F}_A$ al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (A) de la pieza y $\vec{F}_B$ al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (B) , por equilibrio de la viga debe ser:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \quad (2.1)$$

Asimismo, tomando momentos respecto al centro de gravedad G de la sección S , debe cumplirse:

$$\vec{M}_{\vec{F}_A}^G + \vec{M}_{\vec{F}_B}^G = 0 \quad (2.2)$$

Consideremos ahora, por separado, el equilibrio de las dos partes de la pieza (A) y (B) . Para que tal equilibrio exista, es necesario suponer que existen unas fuerzas de interacción que ambas partes se ejercen entre sí, a través de la superficie S . Así, la parte (B) ejercerá sobre la parte (A) unas fuerzas que podemos reducir a una resultante $\vec{R}_A$ y un momento resultante, respecto a G , $\vec{M}_A^G$. De forma análoga, la parte (A) ejerce sobre la parte (B) una fuerza resultante $\vec{R}_B$ y un momento resultante $\vec{M}_B^G$.



Por equilibrio de la parte (A) debe ser:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A + \vec{R}_A &= 0 \\ \vec{M}_{F_A}^G + \vec{M}_A^G &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Por equilibrio de la parte (B) debe ser:

$$\begin{aligned}\vec{F}_B + \vec{R}_B &= 0 \\ \vec{M}_{F_B}^G + \vec{M}_B^G &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Sumando las ecuaciones (2.3) y (2.4) y teniendo en cuenta el equilibrio global (ecuaciones (2.1) y (2.2)), se tiene:

$$\begin{aligned}(\vec{F}_A + \vec{F}_B) + \vec{R}_A + \vec{R}_B &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A = -\vec{R}_B & (2.5a) \\ (\vec{M}_{F_A}^G + \vec{M}_{F_B}^G) + \vec{M}_A^G + \vec{M}_B^G &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_A^G = -\vec{M}_B^G & (2.5b)\end{aligned}$$

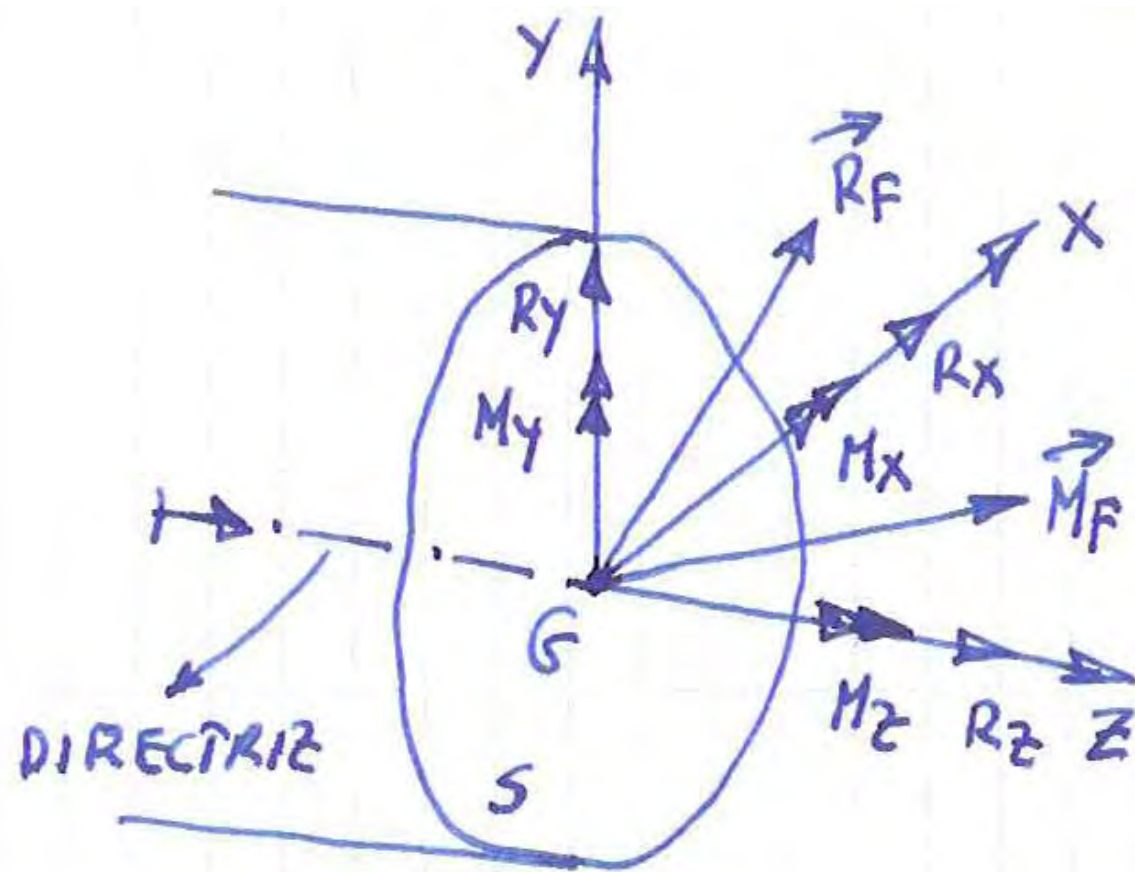
Por lo tanto, las acciones que una parte ejerce sobre la otra son iguales y de sentido contrario.

Llamando por simplicidad: $\vec{R} = \vec{R}_A = -\vec{R}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}_A^G = -\vec{M}_B^G$, se tendrá también que:

$$\left. \begin{aligned}\vec{R} &= -\vec{F}_A = \vec{F}_B \\ \vec{M} &= -\vec{M}_{F_A}^G = \vec{M}_{F_B}^G\end{aligned} \right\} \tag{2.6}$$

Cuando la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}$ se calculan en la forma $\vec{R} = \vec{F}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}_{F_B}^G$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por delante” de S (en la parte B), el cálculo se llama *frontal*. Cuando $\vec{R}$ y $\vec{M}$ se calculan en la forma $\vec{R} = -\vec{F}_A$ y $\vec{M} = -\vec{M}_{F_A}^G$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por detrás” de S (en la parte A), el cálculo se llama *dorsal*. Es evidente que ambos procedimientos conducen a resultados idénticos.

SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERENCIA



En ese sistema de ejes, las resultantes $\vec{R}_F$ y $\vec{M}_F$ se descomponen sobre los tres ejes coordenados

$$\vec{R}_F \rightarrow (R_x, R_y, R_z)$$

$$\vec{M}_F \rightarrow (M_x, M_y, M_z)$$

Definiciones:

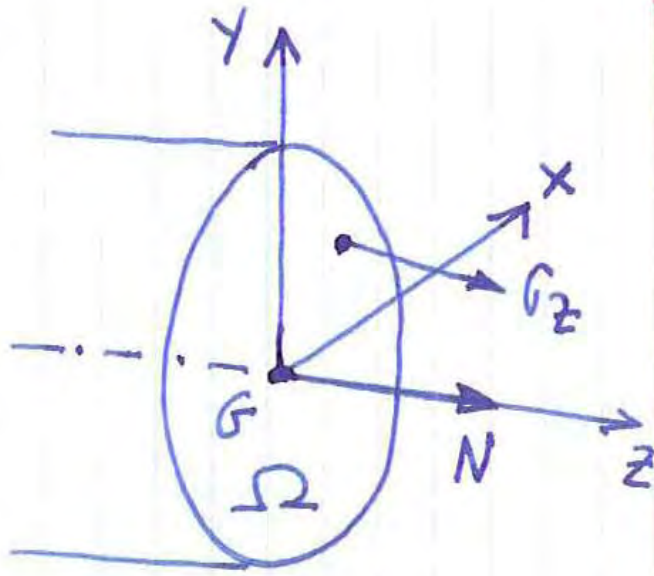
*) Esfuerzo axial: R_z carga aplicada en el centro de gravedad de la sección y perpendicular a la misma. Será de tracción si va dirigida según el sentido positivo del eje Z y de compresión si va en el sentido negativo. Se denominará N

*) Esfuerzos cortantes: R_x, R_y fuerzas contenidas en el plano de la sección. Se denominará $\vec{Q}$ y es la resultante de componentes R_x, R_y .

*) Momentos flectores: M_x, M_y . Se denominará $\vec{M}$ y es la resultante de componentes M_x, M_y

*) Momento torsor: M_z . Se denominará M_T

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDAS A UN AXIL (N)



$$\text{Tensión } \underline{\sigma_z = \frac{N}{\Omega}}$$

N : axil aplicada en el centro de gravedad G.

Ω : área de la sección.

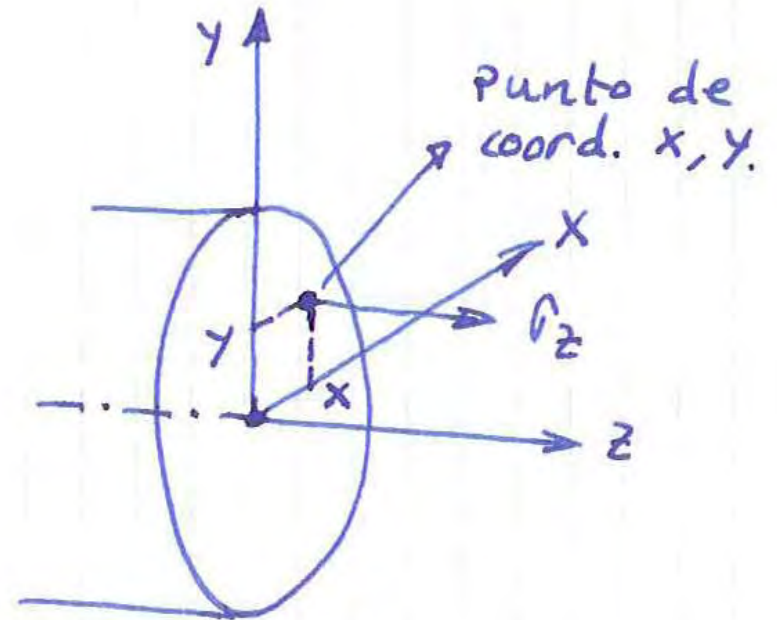
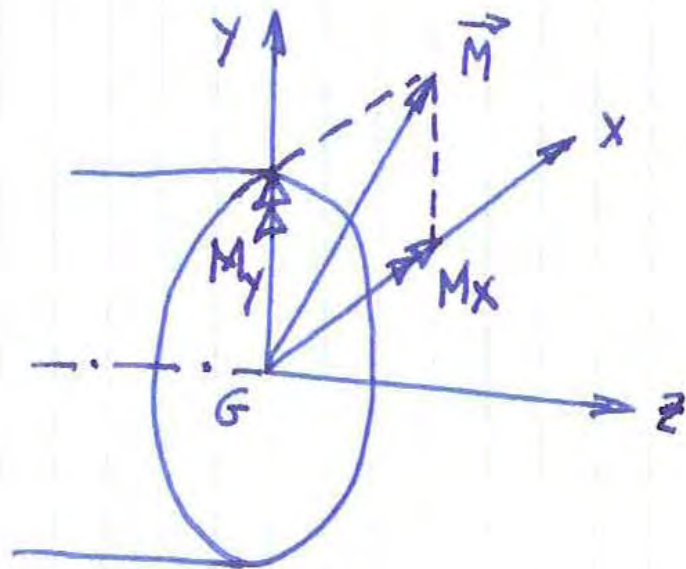
σ_z : tensión uniformemente distribuida de tracción si N es de tracción o de compresión si N es de compresión.

según la ley de Hooke: $\epsilon_z = E \sigma_z$

en: ϵ_z : deformación unitaria

E : Módulo de elasticidad o Módulo de Young.

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDAS A UN MOMENTO FLECTOR (M)



$$\sigma_z = M_x \left[\frac{y \cdot I_y - x \cdot I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] + M_y \left[\frac{y \cdot I_{xy} - x \cdot I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right]$$

σ_z : tensión en un punto de coordenadas x, y

$\vec{M} (M_x, M_y)$: Momento flector de componentes M_x, M_y

I_x : momento de inercia de la sección respecto eje x

I_y : " " " " " " " " " "

I_{xy} : producto de inercia de la sección.

si σ_z es positiva (>0) es de tracción, si es negativa (<0) es de compresión

si los ejes (x, y) son principales de inercia $I_{xy} = 0$

$$\sigma_z = M_x \frac{y}{I_x} - M_y \frac{x}{I_y}$$

En la fórmula σ_z , los valores (x, y) y (M_x, M_y) van con signo. Son positivos los indicados en las figuras.

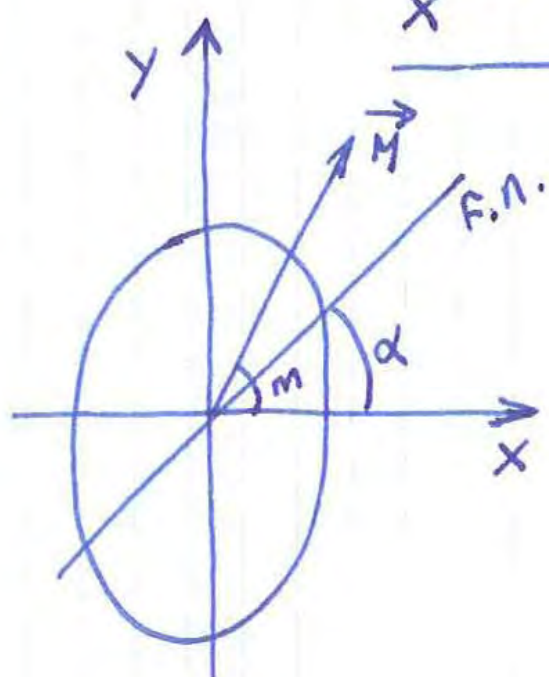
Por otra parte las magnitudes (I_x, I_y) son positivas y la magnitud (I_{xy}) puede ser positiva y negativa.

Fibra neutra. (f.n.)

Es el lugar geométrico de los puntos de tensión $\sigma_z = 0$

$$[M_x I_{xy} + M_y I_x] \cdot x = [M_x I_y + M_y I_{xy}] \cdot y$$

$$\frac{y}{x} = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{M_x I_y + M_y I_{xy}}$$



En ejes principales de inercia

$$I_{xy} = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$$

$$\tan m = \frac{M_y}{M_x}, \quad \tan \alpha = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$$

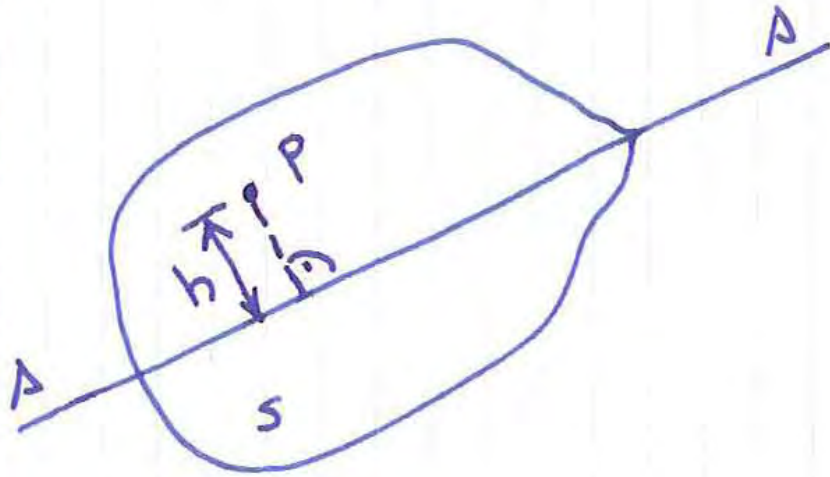
$$\text{luego } \tan \alpha = \tan m \frac{I_x}{I_y}$$

En ejes principales de inercia $I_{xy} = 0$ y además

$$\underline{M_y = 0}$$

$$\underline{\sigma_z = M_x \frac{y}{I_x}} \quad \text{y} \quad \underline{\alpha = m}$$

Momento resistente (También módulo resistente)



Momento (o módulo) resistente
asociado al punto P de
la sección S: $W_p = \frac{I_{AA}}{h}$

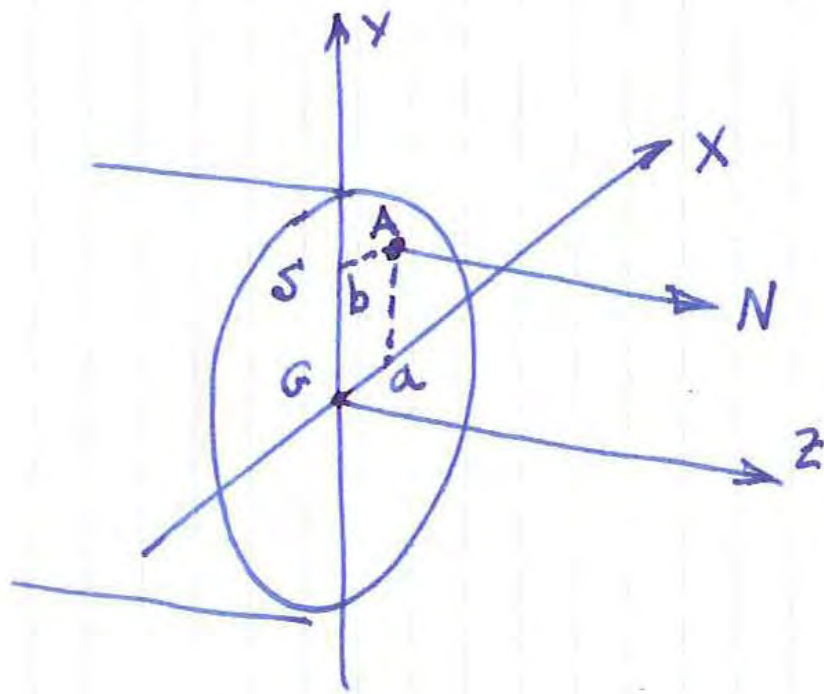
I_{AA} : inercia respecto AA
 h : mínima distancia de P a
la recta AA

De su definición $W_p = \frac{I_{AA}}{h}$ se deduce que es una
característica geométrica de la sección.

En el caso anterior de ejes principales de inercia
 $I_{xy} = 0$ y además $M_y = 0$

$$\Gamma_z = M_x \frac{y}{I_x} = \frac{M_x}{W_y} \quad W_y = \frac{I_x}{y}$$

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES DEBIDAS A UN AXIL Y MOMENTO FLECTOR (N,M)



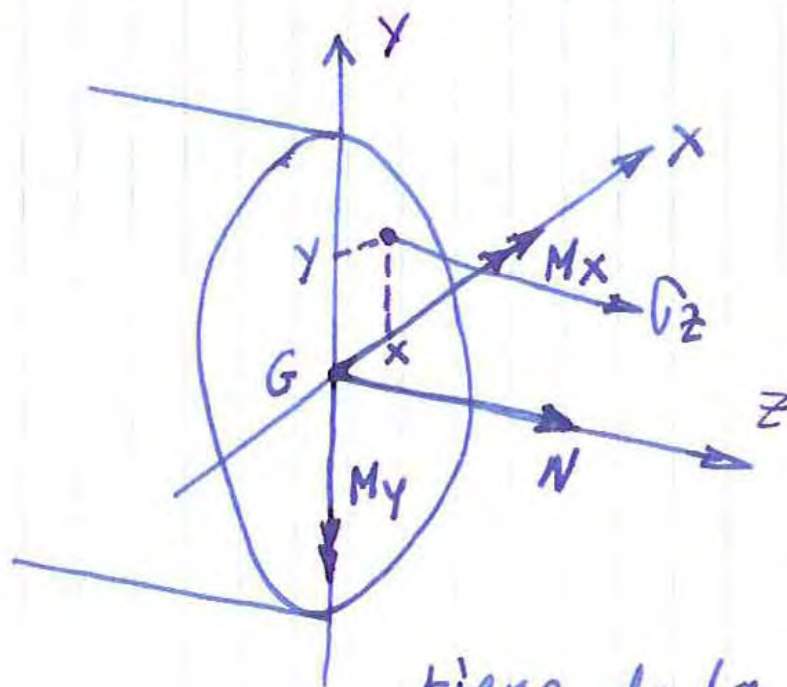
A: coordenadas (a, b) es el punto de aplicación del esfuerzo axial N

Ω : Área de la sección

I_x, I_y : Inercias de la sección

I_{xy} : producto de inercia.

El axil N se reduce a un sistema equivalente en el centro de gravedad. G



Axil: N

$M_x = b \cdot N$, $M_y = -a \cdot N$

Es decir a un axil y dos momentos flectores.

La tensión σ_z en un punto de coordenadas x, y se ob-

tiene de la siguiente expresión:

$$\sigma_z = \frac{N}{\Omega} + (b \cdot N) \left[\frac{y \cdot I_y - x \cdot I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] + (-a \cdot N) \left[\frac{y \cdot I_{xy} - x \cdot I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right]$$

en la expresión anterior las cantidades $N, a, b, x,$ y y van dotadas de signo

$$N: \begin{cases} \text{positiva } (>0) & \text{si es tracción} \\ \text{negativa } (<0) & \text{si es compresión} \end{cases}$$

a, b, x, y : cm su signo según los ejes indicados.

σ_z puede tomar valores positivos o negativos.

si σ_z es positiva (>0) va dirigida según el eje z en sentido positivo (hacia fuera sección)

si σ_z es negativa (<0) va dirigida según el eje z en sentido negativo (hacia dentro sección).

Los valores I_x, I_y son siempre positivos. El valor I_{xy} puede ser positivo o negativo pero I_{xy}^2 es siempre positivo

Fibra neutra (f.n.)

Igual que en el caso anterior hacemos $\sigma_z = 0$

$$\frac{1}{\sigma} + x \left[\frac{a \cdot I_x - b I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] + y \left[\frac{b I_y - a I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] = 0$$

operando
$$\frac{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2}{\sigma} + x [a I_x - b I_{xy}] + y [b I_y - a I_{xy}] = 0$$

La fibra neutra es una recta que no pasa por el centro de gravedad como en el caso de flexión pura. Como se deduce de la ecuación, no depende del eje.

N , solamente de su punto de aplicación (a, b) y de las características de la sección Ω, I_x, I_y, I_{xy}

En ejes $\underline{x, y}$ que sean principales de inercia se tiene que $I_{xy} = 0$ y la ecuación de la recta de la f.n. se reduce a:

$$\underline{\frac{a}{I_y} \cdot x + \frac{b}{I_x} \cdot y + \frac{1}{\Omega} = 0}$$

RESUMEN DE FÓRMULAS

LEY DE HOOKE

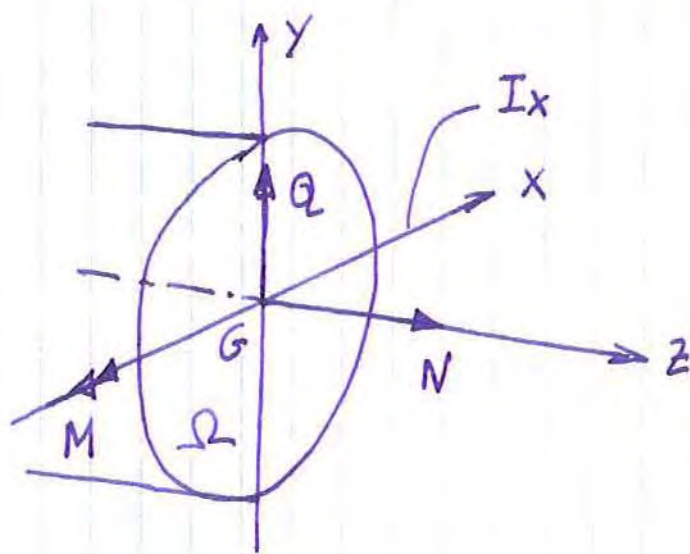
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

sección sometida a un axil N

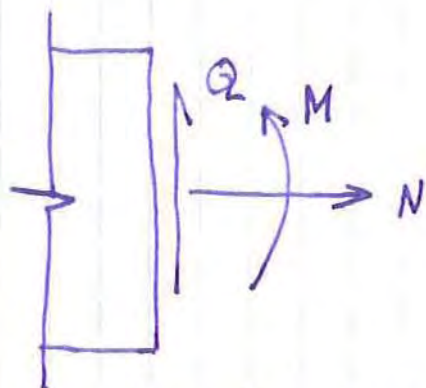
$$\sigma = \frac{N}{\Omega} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Ω = Área de la sección, Δl = incremento de longitud, l = longitud inicial.

DISTRIBUCIONES DE TENSIONES



VISTA LATERAL



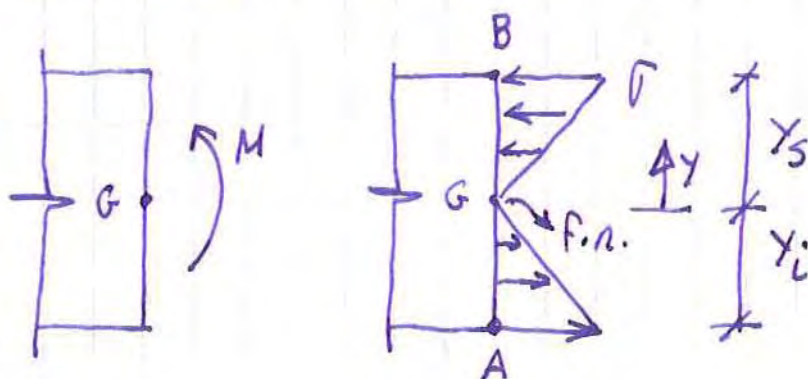
I_x : inercia de la sección

Ω : área de la sección

Hipótesis:

- secciones con eje de simetría el eje Y . X, Y ejes principales de inercia que pasan por G (centro de gravedad).
- Piezas (vigas) con un plano que contiene al eje Y , y con las cargas contenidas en el plano
- N, M y Q es la terna de esfuerzos: M también se le puede denominar M_x y a Q también se le puede denominar Q_y

Flexión pura: sólo M



$$\sigma = M \frac{y}{I_x}$$

En A $y = y_i$ $\sigma_A = M \frac{y_i}{I_x}$ (tracción)

En B $y = y_s$ $\sigma_B = M \frac{y_s}{I_x}$ (compresión)

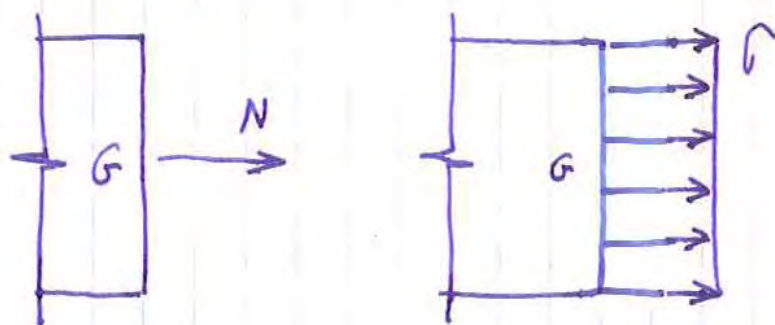
Fibra neutra (f.n.) $\sigma = 0 = \frac{M \cdot y}{I_x} \Rightarrow y = 0$ fibra del centro de gravedad (G)

Módulo resistente $W = \frac{I_x}{y} \Rightarrow \sigma = \frac{M}{W}$

Cada fibra tiene un módulo

$$\begin{cases} \text{En A} & W_A = \frac{I_x}{y_i} \\ \text{En B} & W_B = \frac{I_x}{y_s} \end{cases}$$

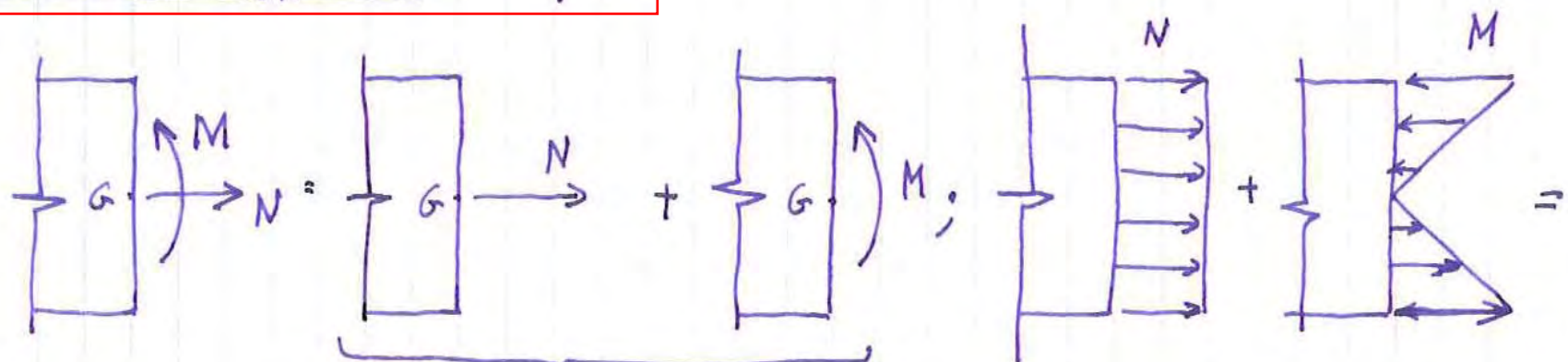
Esfuerzo axial: sólo N



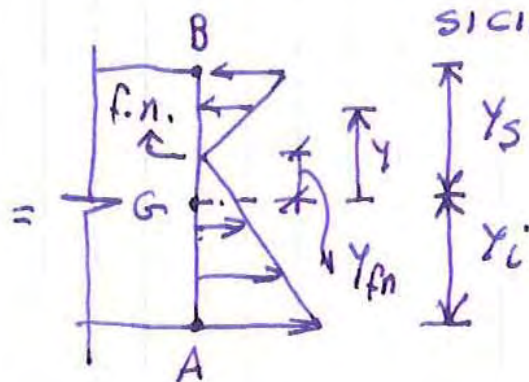
Tensión uniforme

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Flexión compuesta: N y M



PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN



$$\sigma = \frac{N}{A} \pm M \frac{y}{I_x}$$

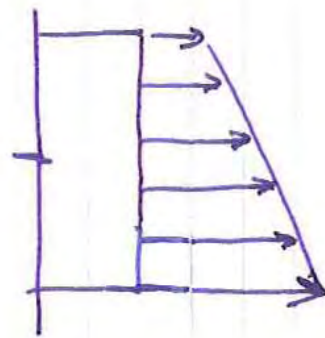
En A $\sigma_A = \frac{N}{A} + M \frac{y_i}{I_x}$ (se suman)

En B $\sigma_B = \frac{N}{A} - M \frac{y_s}{I_x}$ (se restan)

Fibra neutra (f.n.) $\sigma = 0 = \frac{N}{A} - M \frac{y_{fn}}{I_x} \Rightarrow y_{fn} = \frac{N I_x}{A M}$

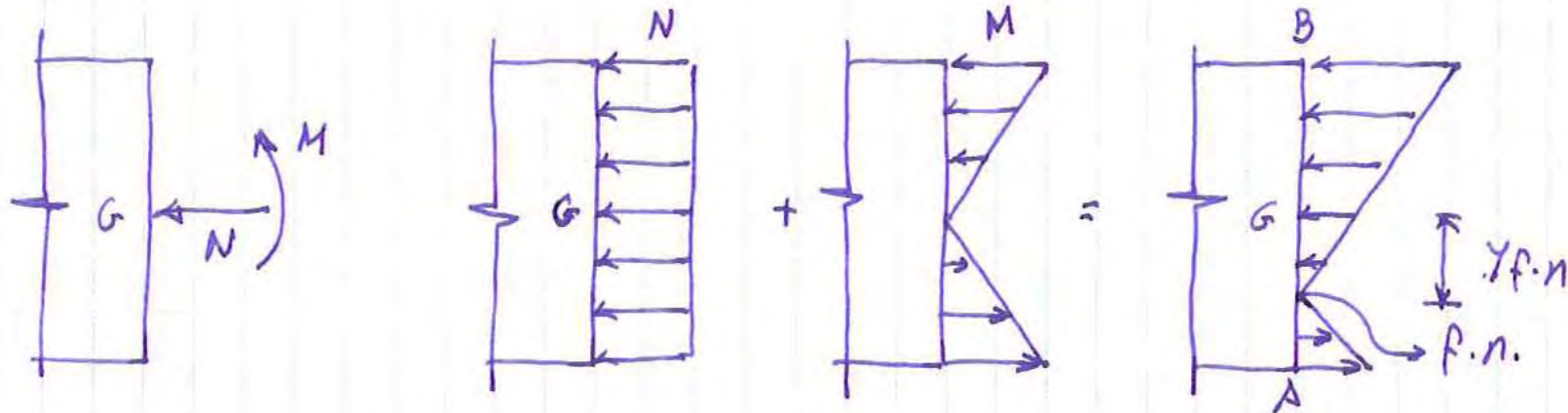
$$\frac{N}{Q} > M \frac{Y_s}{I_x}$$

Toda la sección está en tracción



La fibra neutra queda fuera de la sección,

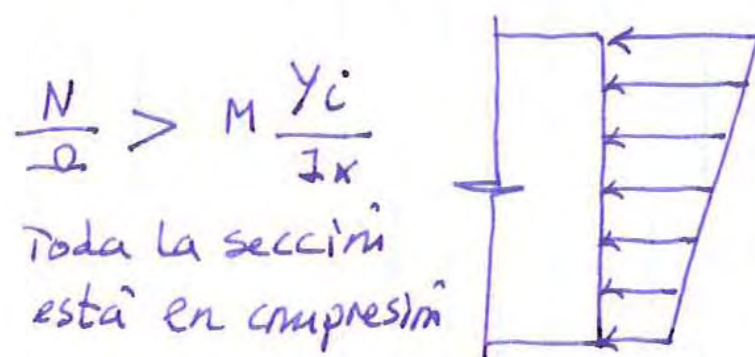
Caso N axial de compresión



$$\text{En A} \quad \sigma_A = \frac{N}{Q} - M \frac{Y_i}{I_x} \quad (\text{se restan})$$

$$\text{En B} \quad \sigma_B = \frac{N}{Q} + M \frac{Y_s}{I_x} \quad (\text{se suman})$$

fibra neutra $\sigma = 0 = \frac{N}{Q} - \frac{M Y_{fn}}{I_x}$ $Y_{fn} = \frac{N I_x}{Q M}$

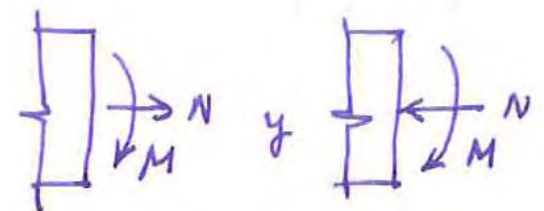


$$\frac{N}{Q} > M \frac{Y_i}{I_x}$$

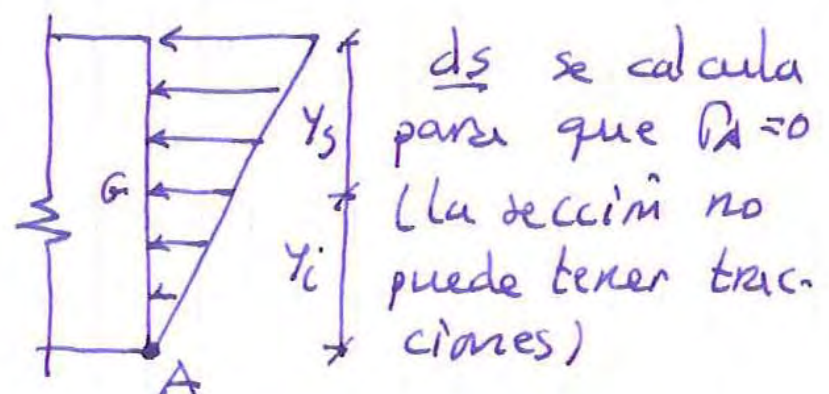
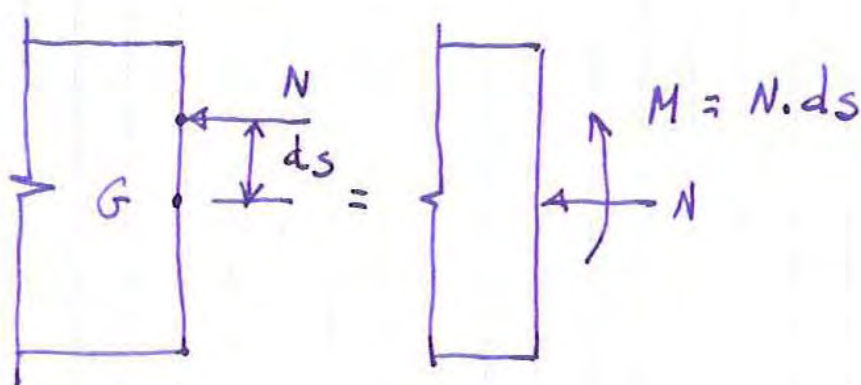
Toda la sección está en compresión

La fibra neutra queda fuera de la sección

Análogamente resulta para los casos



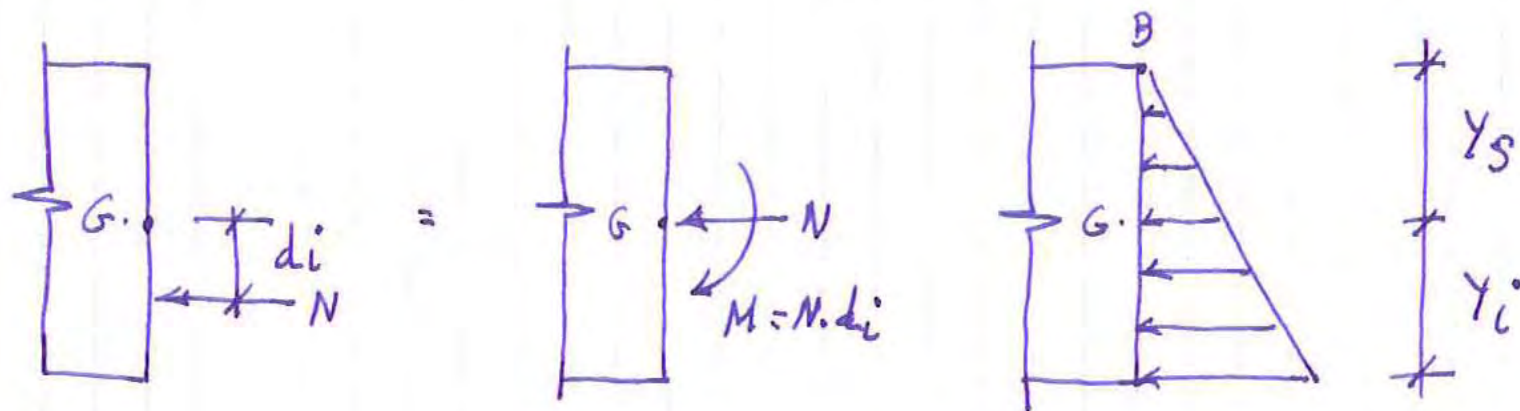
Módulo central



ds se calcula para que $\sigma_A = 0$ (la sección no puede tener tracciones)

$$\tau_A = 0 = \frac{N}{\Omega} - \frac{N \cdot ds \cdot y_i}{I_x} \Rightarrow d_s = \frac{I_x}{\Omega \cdot y_i}$$

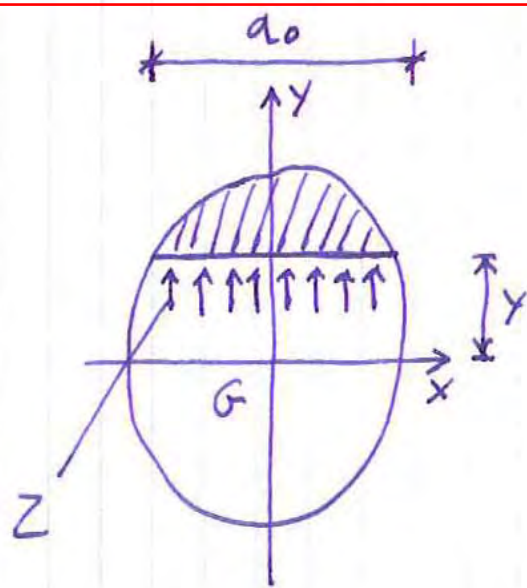
También



$$\tau_B = 0 = \frac{N}{\Omega} - \frac{N \cdot di \cdot y_s}{I_x} \Rightarrow di = \frac{I_x}{\Omega \cdot y_s}$$

Núcleo central es el ancho $d_s + di$

Flexión simple: Q



Tensión tangencial $\underline{Z}$ en la fibra a la altura $\underline{y}$ debido a un cortante Q_y

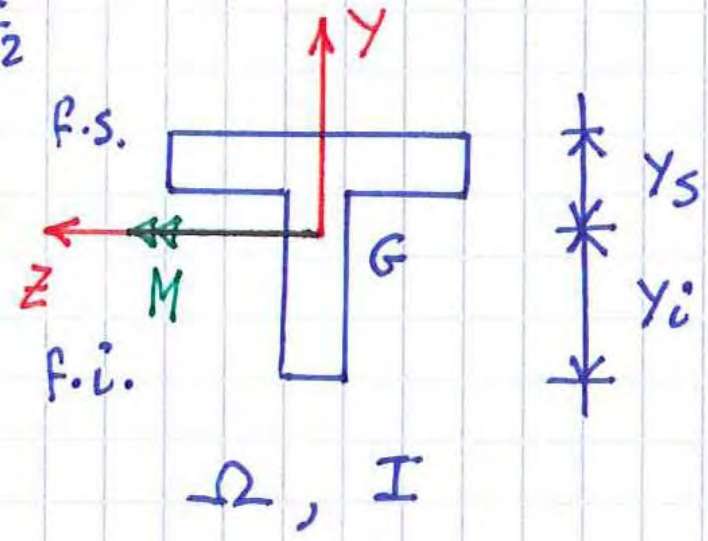
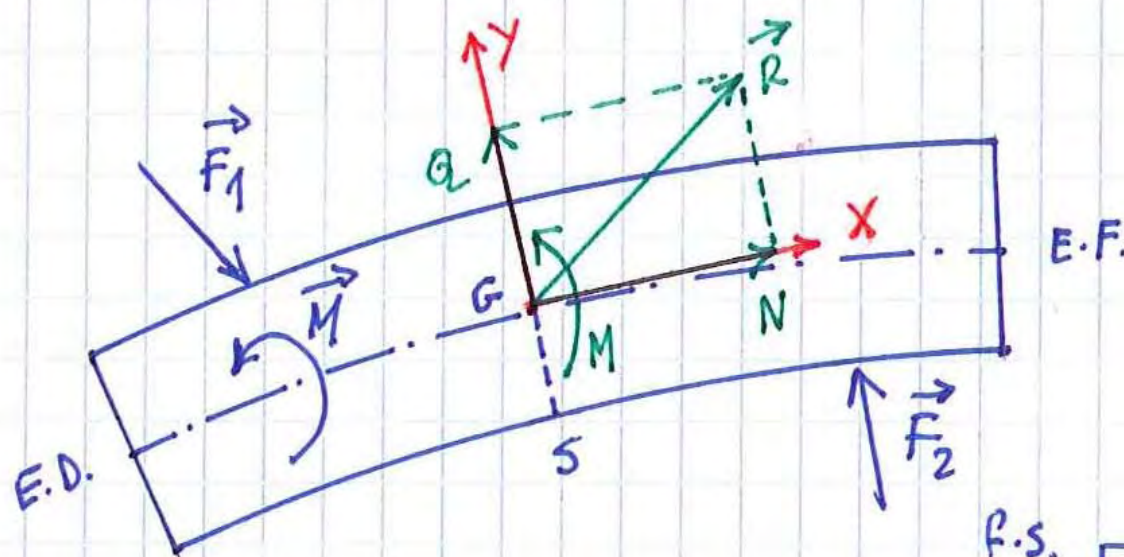
$$Z = \frac{Q_y M_e}{I_x a_0}$$

cm I_x : inercia respecto de $\underline{x}$

a_0 : ancho de la sección a la altura $\underline{y}$

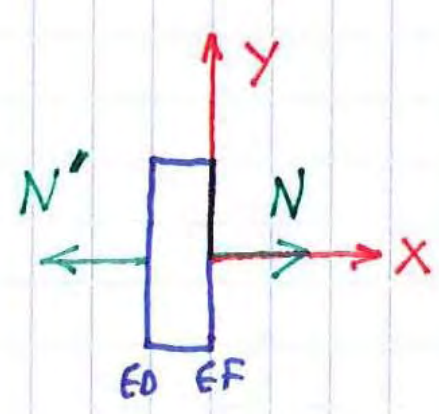
M_e : momento estático de la sección rayada respecto de $\underline{x}$

ESFUERZOS EN PIEZAS DE PLANO MEDIO

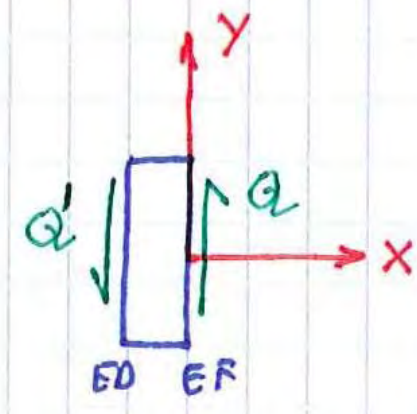


ESFUERZO AXIAL $N = R_x$
 ESFUERZO CORTANTE $Q = R_y$
 MOMENTO FLECTOR M

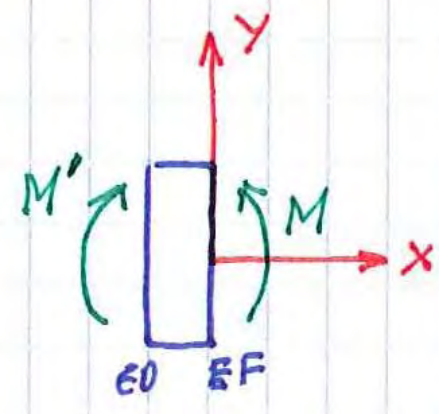
CRITERIO DE SIGNOS



$N > 0$ TRACCION



$Q > 0$ PAR ANTIHORIZARIO



$M > 0$ ANTIHORIZARIO EN E.F.

CALCULO DE TENSIONES

Fibra superior (f.s)

Tensión normal

$$\sigma_s = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot y_s}{I} \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ TRACCION} \\ < 0 \text{ COMPRESION} \end{array}$$

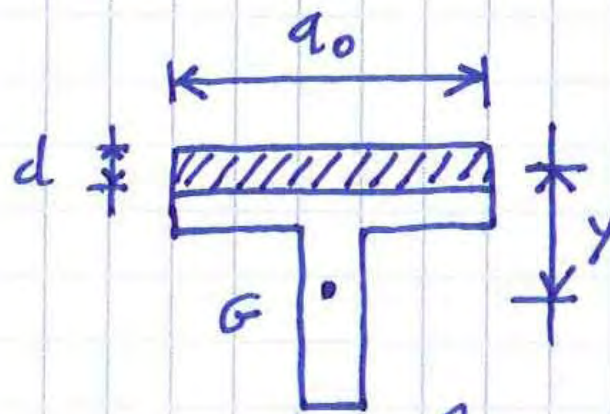
Fibra inferior (f.i.)

Tensión normal

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y_i}{I} \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ TRACCION} \\ < 0 \text{ COMPRESION} \end{array}$$

Tensión tangencial.

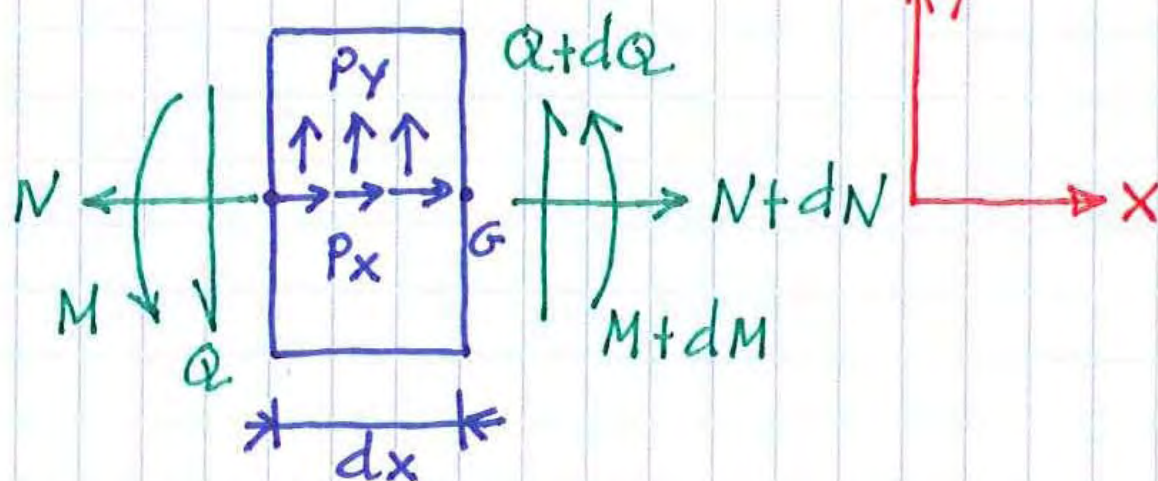
$$\tau = \frac{Q \cdot M_e}{I \cdot a_0}$$



M_e = Momento estático del área rayada respecto G
 $M_e = a_0 \cdot d \cdot y$

EQUILIBRIO DE UNA REBANADA

Rebanada diferencial dx



Equilibrio

$$\bullet) \sum F_x = 0 \quad -N + p_x \cdot dx + (N + dN) = 0$$

$$p_x = -\frac{dN}{dx}$$

$$\cdot) \sum F_y = 0 \quad -Q + P_y \cdot dx + (Q + dQ) = 0$$

$$P_y = - \frac{dQ}{dx}$$

$$\cdot) \sum M_G = 0 \quad -M + Q \cdot dx + (M + dM) - P_y \frac{dx^2}{2} = 0$$

$$Q = - \frac{dM}{dx}$$

APOYOS

•) DISPOSITIVOS QUE UNEN UNA ESTRUCTURA AL MEDIO DE SUSTENTACION

•) DOBLE FUNCION: IMPEDIR (O LIMITAR) MOVIMIENTOS Y TRANSMITIR LAS CARGAS SOPORTADAS POR LA ESTRUCTURA AL MEDIO DE SUSTENTACION

•) ESTRUCTURAS DE PLANO MEDIO $\longrightarrow$ 3 GRADOS DE LIBERTAD $\longrightarrow$

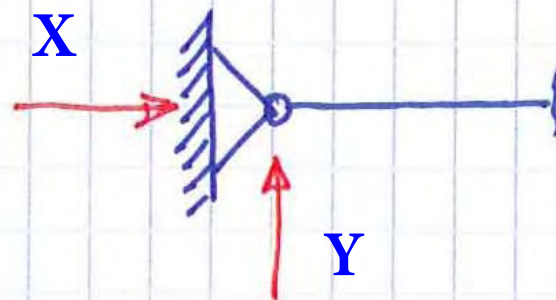
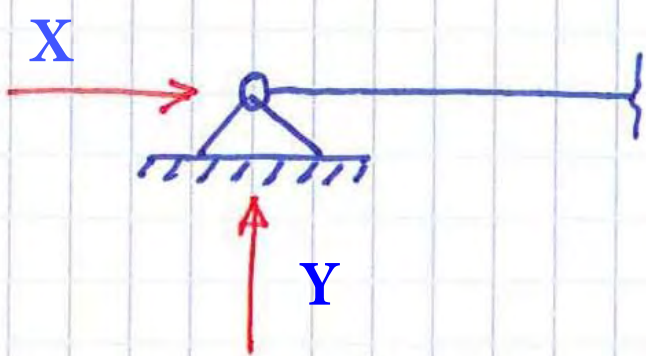
u_x : desplazamiento según x
 v_y : desplazamiento según y
 θ : angulo en el plano

•) POR CADA GRADO DE LIBERTAD IMPEDIDO EL APOYO TRANSMITE A LA ESTRUCTURA UNA REACCION. ESTAS REACCIONES SON IGUALES Y DE SENTIDOS OPUESTOS A LAS FUERZAS QUE LA ESTRUCTURA TRANSMITE A LA SUSTENTACION

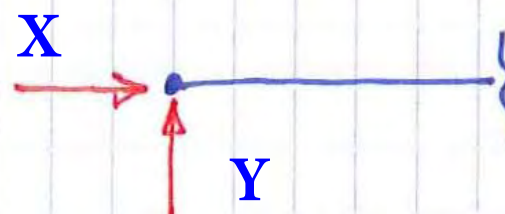
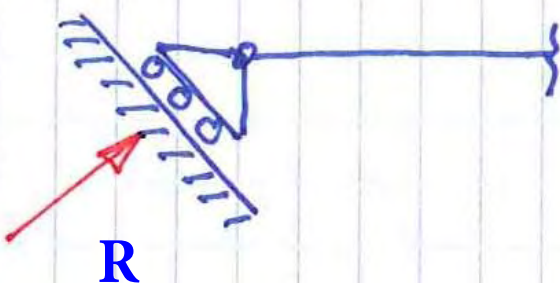
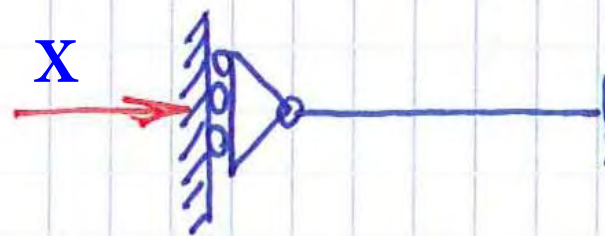
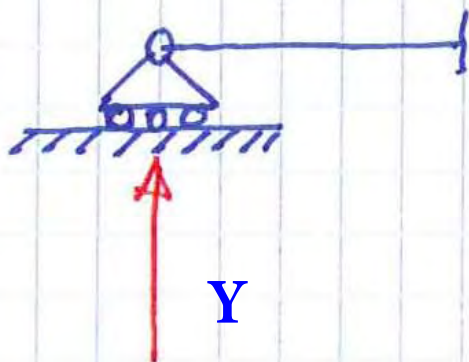
TIPOS DE APOYOS

ARTICULACIONES:

FIJAS :

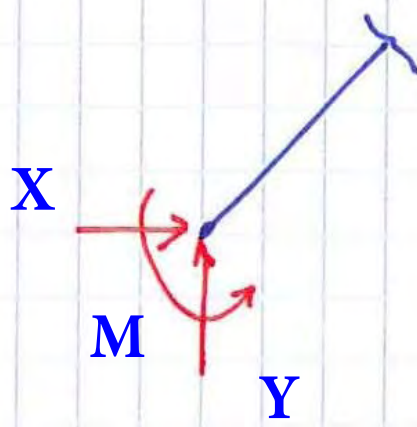
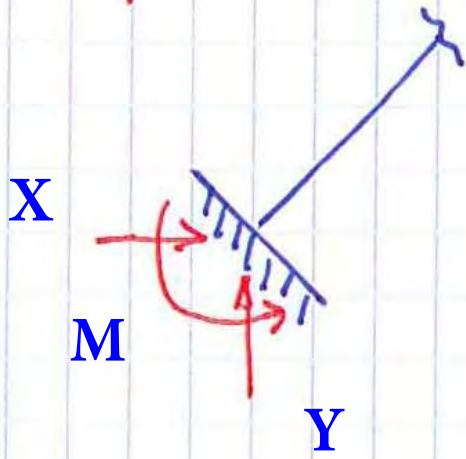
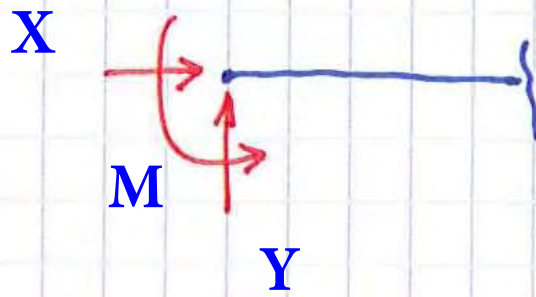
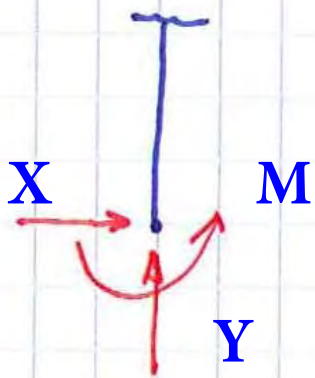
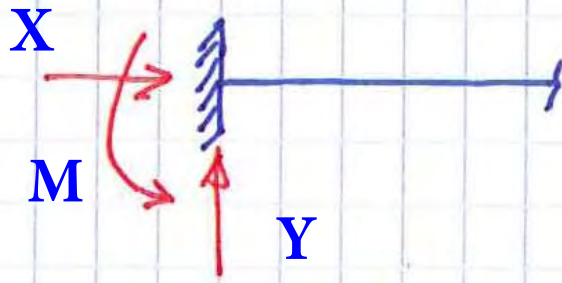
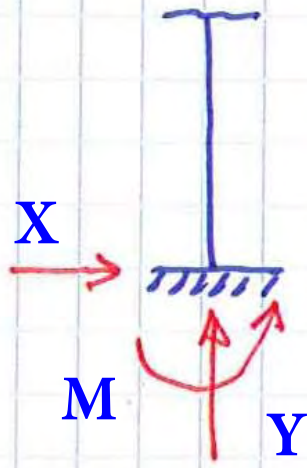


MOVILES:

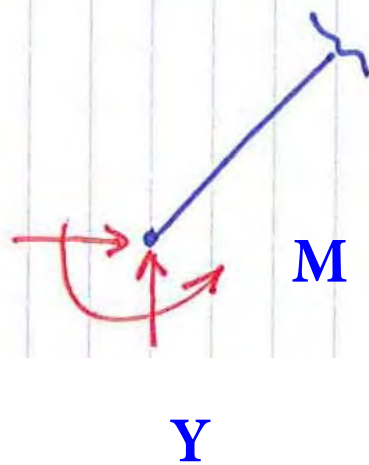
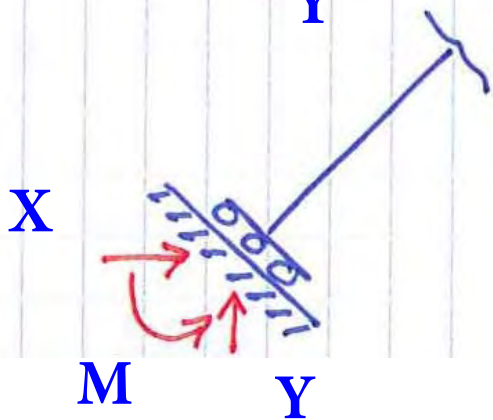
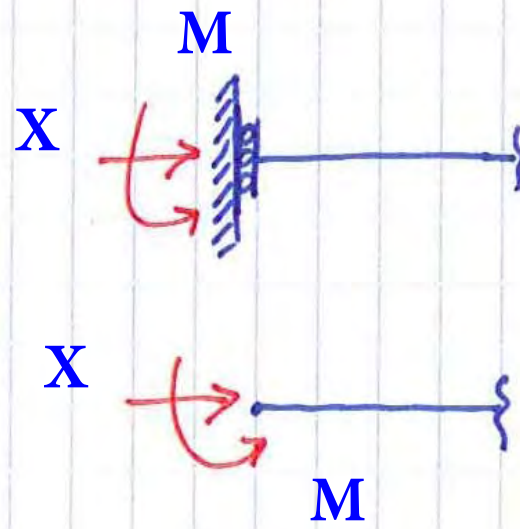
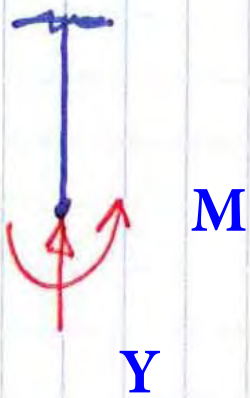
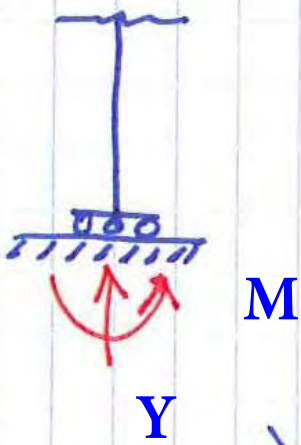


EMPOTRAMIENTOS

Fijos:

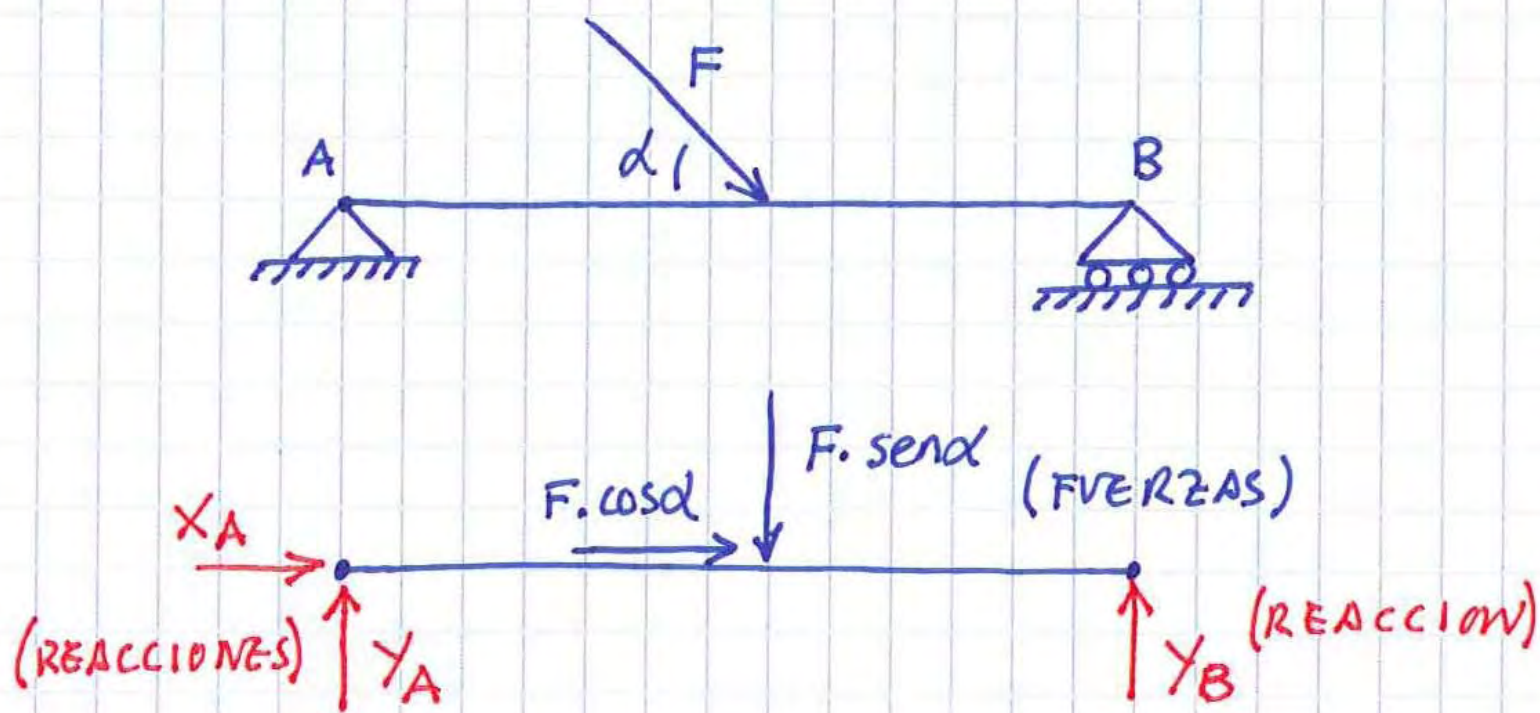


MOVILES



CALCULO DE ESTRUCTURAS
ISOSTATICAS - HIPERESTATICAS
LESYES DE ESFUERZOS

DIAGRAMA DE SOLIDO LIBRE



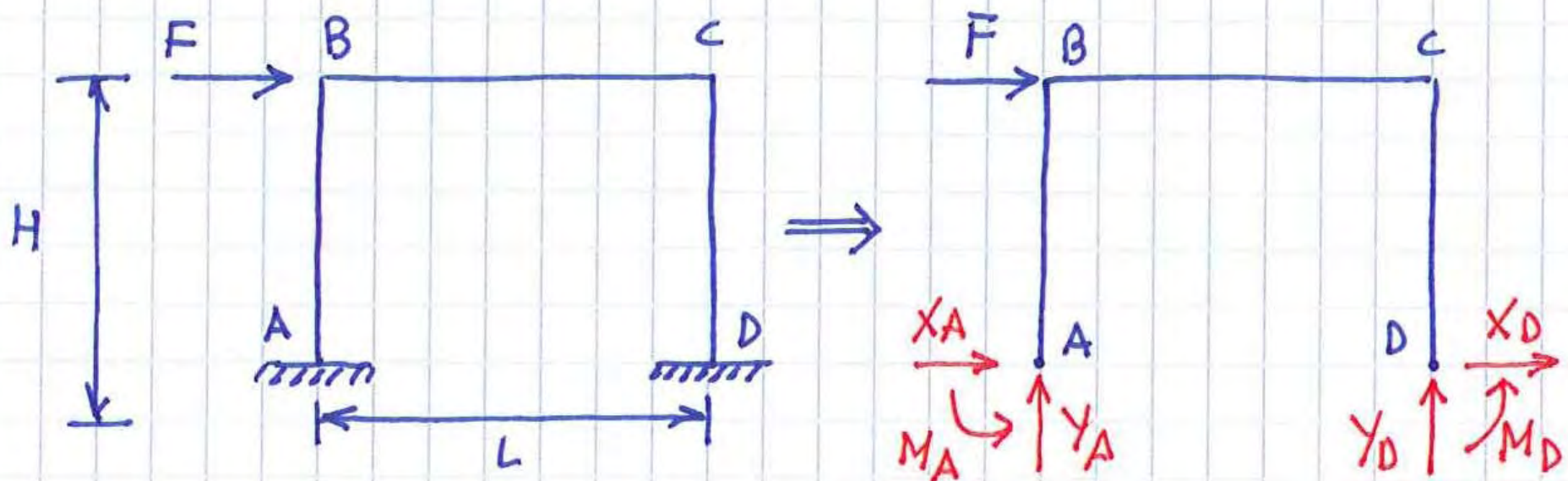
EQUILIBRIO

LAS FUERZAS: ACCIONES (F) Y REACCIONES (X_A, Y_A, Y_B) QUE ACTUAN SOBRE UNA ESTRUCTURA DEBEN ESTAR EN EQUILIBRIO ESTÁTICO

$$\sum_i \vec{F}_i \rightarrow \begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i M_i^O = 0$$

LA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO SE CUMPLE PARA LA ESTRUCTURA COMPLETA Y PARA CADA UNA DE SUS PARTES



EQUILIBRIO GLOBAL:



$$\sum_i F_i x = 0$$

$$F + X_A + X_D = 0$$

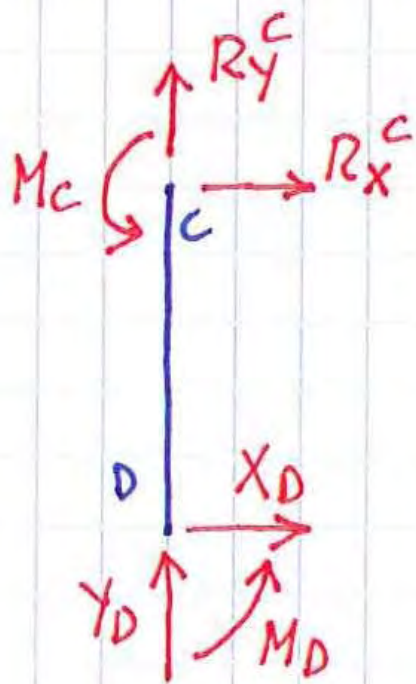
$$\sum_i F_i y = 0$$

$$Y_A + Y_D = 0$$

$$\sum_i M_i^A = 0$$

$$M_A - F \cdot H + M_D + Y_D \cdot L = 0$$

EQUILIBRIO DE BARRA



$$\sum_i F_i x = 0$$

$$R_X^C + X_D = 0$$

$$\sum_i F_i y = 0$$

$$Y_D + R_Y^C = 0$$

$$\sum_i M_i^D = 0$$

$$M_D + M_C - R_X^C \cdot H = 0$$

RESOLVER UNA ESTRUCTURA

DENOMINAREMOS RESOLVER UNA ESTRUCTURA A CALCULAR EL VALOR DE LOS ESFUERZOS (N, M, Q) QUE ACTUAN SOBRE CADA UNA DE LAS SECCIONES DE TODAS LAS PIEZAS (BARRAS) QUE COMPONEN LA ESTRUCTURA

CLASIFICACION DE ESTRUCTURAS

ECUAC. ESTÁTICA:

$$\begin{aligned}\sum_i F_i x &= 0 \\ \sum_i F_i y &= 0 \\ \sum_i M_i^o &= 0\end{aligned} \quad (I)$$

¿SE RESUELVE LA ESTRUCTURA CON LAS ECUACIONES (I)?

SI $\rightarrow$ ESTRUCTURA ISOSTÁTICA
(ESTÁTICAMENTE DETERMINADA)

NO $\rightarrow$ ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA
(ESTÁTICAMENTE INDETERMINADA)

GRADO DE HIPERESTATISMO (Gh)

$$Gh = nR - e$$

$nR = n^{\circ}$ de reacciones

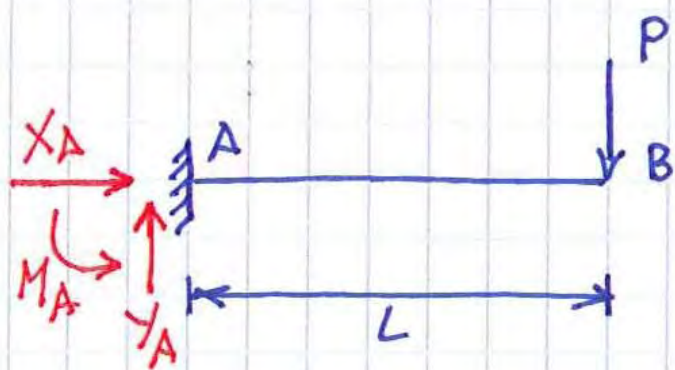
$e = n^{\circ}$ de ecuaciones de la estática

$Gh = 0$ ESTRUCTURA ISOSTÁTICA

> 0 ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA DE GRADO Gh.

< 0 MECANISMO DE GRADO Gh.

ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS



$$nR = 3 : X_A, Y_A, M_A$$

$$e = 3 \text{ (ESTRUCTURA PLANA)}$$

$$Gh = 3 - 3 = 0 \text{ ISOSTÁTICA}$$



$$\sum F_x = 0$$

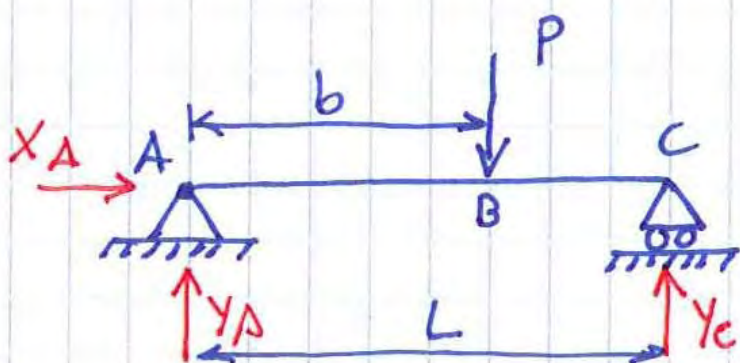
$$X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A - P = 0 \Rightarrow Y_A = P$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - P \cdot L = 0 \Rightarrow M_A = P \cdot L$$



$$nR = 3 : X_A, Y_A, Y_C$$

$$e = 3$$

$$Gh = 3 - 3 = 0 \text{ ISOSTÁTICA}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A - P + Y_C = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

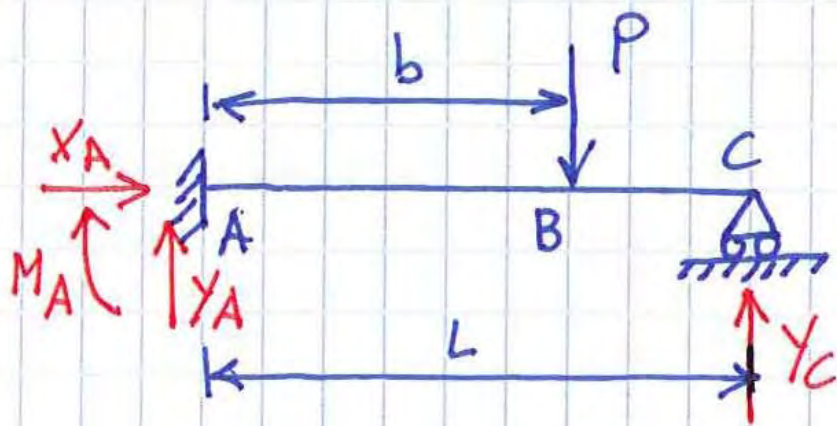
$$-P \cdot b + Y_C \cdot L = 0$$

$$X_A = 0$$

$$Y_A = P(L-b)/L$$

$$Y_C = P \cdot b/L$$

ESTRUCTURA HIPERESTATICA



$$nR = 4 : X_A, Y_A, M_A, Y_C$$

$$e = 3$$

$$G_h = 4 - 3 = 1 \text{ HIPERESTATICA GRADO 1}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A - P + Y_C = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - P \cdot b + Y_C \cdot L = 0$$

SISTEMA INDETERMINADO

$$X_A = 0$$

$$Y_A = P - Y_C$$

$$M_A = P \cdot b - Y_C \cdot L$$

Y_C : INCOGNITA

HIPERESTATICA

-) SE NECESITAN ECUACIONES ADICIONALES
-) TANTAS COMO G_h .
-) EN ESTE CASO $G_h = 1$: SE NECESITA UNA ECUACION ADICIONAL : COMPATIBILIDAD DE MOVIMIENTOS

$$V_C = 0 \text{ DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE C NULO}$$

-) DOS MÉTODOS : $\begin{cases} \text{MÉTODO DE COMPATIBILIDAD (FLEXIBILIDAD)} \\ \text{MÉTODO DE RIGIDEZ (MOVIMIENTOS)} \end{cases}$

LEYES DE ESFUERZOS

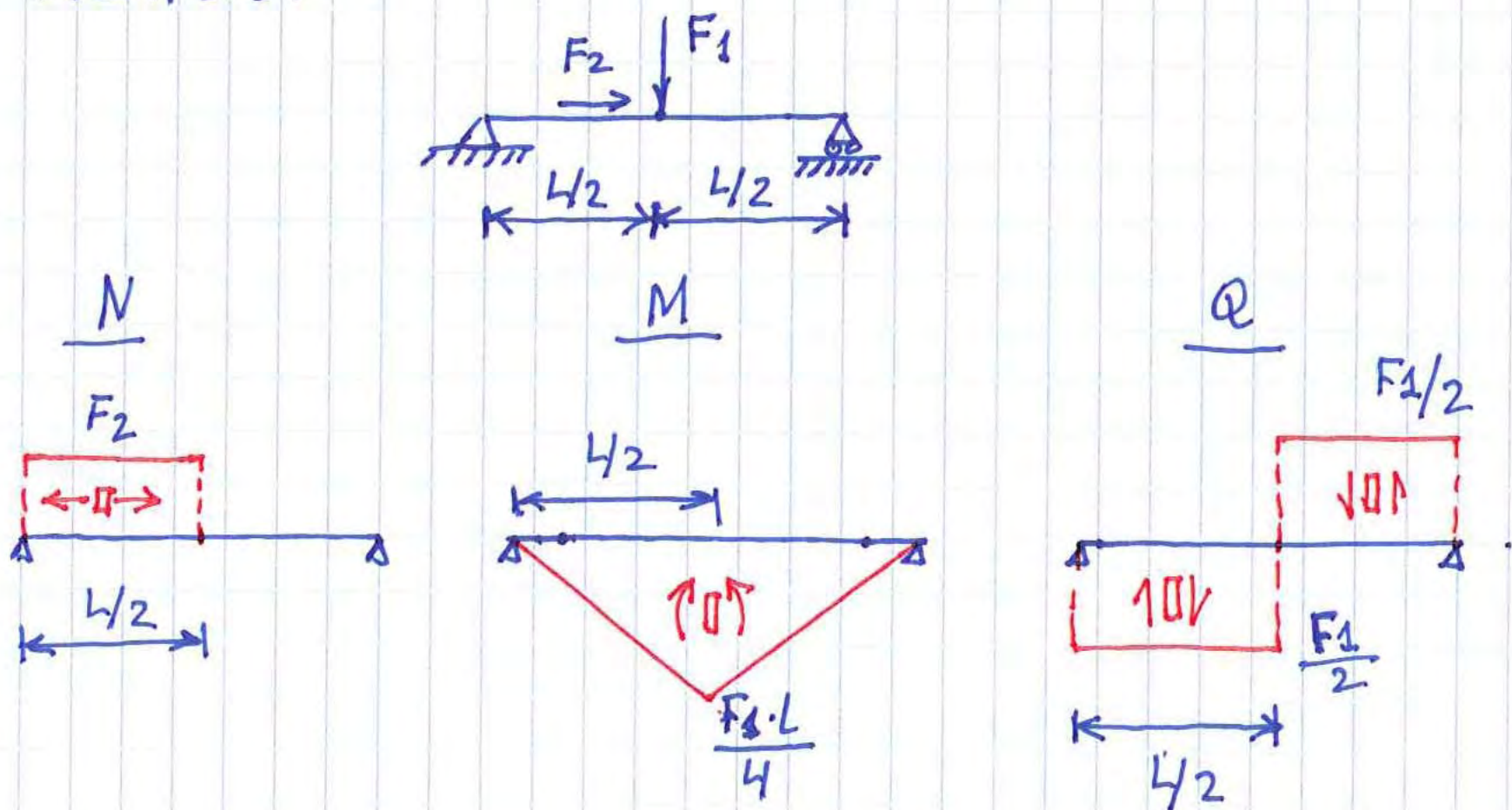
SE LLAMAN LEYES (Ó DIAGRAMAS) DE ESFUERZOS A LA REPRESENTACION GRAFICA DE LAS VARIACIONES DE LOS ESFUERZOS (N, M, Q) A LO LARGO DE LAS PIEZAS (BARRAS) DE LA ESTRUCTURA.

PERMITEN DETERMINAR LAS SECCIONES MAS SOLICITADAS Y OBTENER LOS ESFUERZOS MAXIMOS

ESTRUCTURAS DE PLANO MEDIO $\Rightarrow$ TRES LEYES

-) LEY DE AXILES (N)
-) LEY DE FLECTORES (M)
-) LEY DE CORTANTES (Q) $\left[Q = -\frac{dM}{dx} \right]$

EJEMPLOS:



SISTEMATICA DE RESOLUCION DE ESTRUCTURAS

PASOS A DAR:

-) DETERMINAR : EST. ISOSTATICA O HIPERESTATICA
-) DETERMINAR : REACCIONES EXTERIORES
-) OBTENCION LEYES DE ESFUERZOS : N, M y Q.
-) DETERMINAR SOLICITACIONES MÁXIMAS: BARRAS y ESTRUCTURA : AXIL, FLECTOR Y CORTANTE
-) ANALISIS TENSIONAL : $\sigma < \sigma_{ADMISIBLE}$